Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

магістра

на тему ***«МГД нестійкість поверхонь розділу в системі незмішуваних рідин»***

Виконав: студент групи МП61 II курсу (другий магістерський рівень), спеціальності 113 "Прикладна математика" освітньо-наукової програми "Прикладна математика"
Мішнєв Д.Є.
Керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики
Пославський С.О.
Рецензент: доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та робототехніки Харківського національного університету радіоелектроніки
Ромашов Ю.В.

Харків — 2025 рік

Анотації

Мішнєв Денис Євгенійович. МГД нестійкість поверхонь розділу в системі незмішуваних рідин. 33 сторінок, 10 рисунків, 2 лістингів. У роботі досліджується нестійкість поверхонь розділу у рідкометалевій батареї, що виникають під впливом МГД взаємодії. Система моделюється за допомогою системи нелінійних диференціальних рівнянь. Досліджено положення рівноваги та їх стійкість. Визначено умови втрати стійкості положення рівноваги.

Ключові слова: магнітогідродинаміка, рідкометалева батарея, нестійкість, коливання.

Mishniev Denys. Interface MHD instability in a system of immiscible liquids. 33 pages, 10 figures, 2 listings. The paper investigates the instability of interfaces in a liquid metal battery, which arise under the influence of MHD interaction. The system is modeled using a system of nonlinear differential equations. Equilibrium states and their stability are investigated. The conditions for the loss of stability of the equilibrium states are determined.

Keywords: magnetohydrodynamics, liquid metal battery, instability, oscillation.

Зміст

Вступ

Сучасний світ є дуже енергозалежним. Постійне зростання кількості населення, розвиток цифрових технологій, популяризація електромобілів потребують значної генерації електроенергії. Крім того, розвиток і дослідження, нині популярного, штучного інтелекту вимагають для своєї роботи власних електростанцій. Таким чином, прогнозується, що потреба в електроенергії до середини XXI століття зросте більш ніж удвічі. Проте будівництво нових електростанцій стикається з кліматичною проблемою, яка закликає до зменшення викидів від використання вугільних, газових та нафтових електростанцій. Єдиним шляхом залишається збільшення використання відновлюваних джерел енергії, таких як сонячна та вітрова, які є більш екологічними. Але генерація енергії від сонячних і вітрових електростанцій є доволі нестабільною та сильно залежить від погодних і кліматичних умов. Також вони не можуть швидко збільшити або зменшити виробництво енергії, через що не відповідають поточному попиту в системі — тобто піки виробництва не збігаються з піками споживання. Через низку цих проблем у системі можуть виникати дефіцити, що призведе до віялових відключень, або ж буде надлишок енергії, який може спричинити аварії, якщо його не скинути. Такі проблеми є актуальними і для України. Через обстріли теплові електростанції, які є доволі гнучкими у виробництві електроенергії, не працюють, а інші не мають змоги швидко реагувати на потреби споживачів, через що маємо постійні відключення. Для вирішення цієї проблеми потрібні ефективні, потужні, довгострокові сховища електроенергії.

Існують різні системи зберігання: теплові, механічні та електрохімічні.

Дослідження показали, що електрохімічні технології, зокрема батареї, можуть відповідати всім зазначеним вимогам. Серед різних типів рідкометалеві батареї є перспективними кандидатами для великомасштабного та довготривалого стаціонарного зберігання електроенергії.

Рідкометалева батарея містить електрохімічний елемент, що складається з трьох шарів рідини: легкого рідкого металу A, який зазвичай є лужним або лужноземельним з найнижчою щільністю, важкого металу B внизу, та суміші розплавленого соляного електроліту між ними. Через різницю густин рідини не змішуються. У процесі розряду батареї рідкий метал A віддає електрони, внаслідок чого на межі розділу електрод-електроліт відбувається реакція окиснення. Далі отримані іони переміщуються електролітом до нижнього металу, де відбувається наступна електрохімічна реакція на межі електроліт-метал B. Товщина шару металу B збільшується, а шару металу A — зменшується. Під час цього процесу верхній метал виступає анодом, нижній — катодом. У разі заряджання процес відбувається у зворотному напрямку: метал B віддає електрони, на межі з електролітом відбувається реакція, отримані іони прямують до межі з металом A, де відбувається електрохімічна реакція, що призводить до збільшення шару металу A і зменшення шару металу B. У цьому випадку метал B виконує роль анода, а метал A — катода [1].

Проте у таких батареях виникають деякі нестабільності, які можуть призвести до деформації межі розділу, що, своєю чергою, може спричинити розрив шарів і руйнування батареї. Одна з можливих нестабільностей виникає внаслідок магнітоелектрогідродинамічної взаємодії. Під час заряджання або розряджання сильний струм проходить через шари рідини з дуже різною електропровідністю. Це означає, що навіть незначна деформація поверхні розділу електроліт-метал, тобто зміна локальної товщини електроліту, викликає значну зміну локального опору і, відповідно, значні коливання в розподілі електричних струмів усередині батареї.

У роботі розглянуто математичну модель коливань двох поверхонь розділу, які виникають під впливом МГД взаємодії. Досліджується система чотирьох диференціальних рівнянь другого порядку відносно амплітудних множників двох головних мод коливань.

Розділ 1

Постановка задачі

Розглянемо основний принцип роботи рідкометалевої батареї [1] (Рис. 1.1). Як зазначалося раніше, рідкометалева батарея складається з трьох речовин: легкого металу A, наприклад, літію або магнію, соляного розплаву електроліту та важкого металу B, такого як галій, вісмут або алюміній. Під час розряджання рідкий метал A віддає свої електрони, внаслідок чого на межі розділу між металом A та електролітом відбувається електрохімічна реакція (1.1):

$$A \to A^{n_e+} + n_e e^- \tag{1.1}$$

де $n_e e^-$ - кількість відданих електронів;

A^{n_e+} - позитивно заряджені іони металу A, отримані внаслідок реакції

Далі, внаслідок дифузії, іони A^{n_e+} досягають межі розділу між електролітом та рідким металом B, де відбувається електрохімічна реакція відновлення (1.2):

$$A^{n_e+} + n_e e^- \to A \tag{1.2}$$

Відновлені атоми металу A дифундують у металі B, утворюючи сплав. У цьому процесі товщина нижнього шару рідкого сплаву збільшується, а верхнього шару — зменшується. Під час заряджання відбувається зворотний процес. На нижній сплав металу подається струм із зовнішнього джерела електроенергії. Зовнішній струм руйнує хімічний зв'язок легкого та важкого металів, утворюючи позитивні іони легкого металу A^{n_e+} та вільні електрони $n_e e^-$. Вільні електрони виводяться у зовнішній контур та спрямовуються через нього до верхньої частини батареї. Позитивні іони легкого металу рухаються вгору через електроліт. Далі, на поверхні розділу між легким металом A та електролітом, вони захоплюють вільні електрони, які надійшли з зовнішнього контуру. Таким чином, верхній шар металу збільшується, а нижній сплав зменшується.

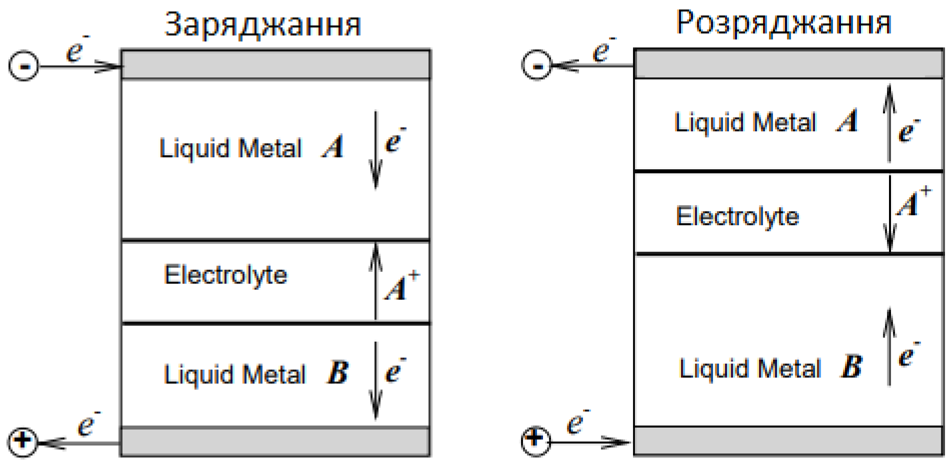

Рис. 1.1: Схематичний процес заряджання та розряджання рідкометалевої батареї. Малюнок взято з [2]

Дослідження рідкометалевих батарей здебільшого пов'язані з вивченням течій та магнітогідродинамічної нестабільності [3,4]. Остаточною метою є визначення руйнівного впливу різних нестабільностей на батарею, що виникають під час заряджання або розряджання.

У даній роботі розглядається нестабільність, що виникає через сили Лоренца в магнітному полі, індукованому струмом. Так, у рідкометалевій батареї присутнє магнітне поле, а струм вертикально протікає через шари рідкого металу. Якщо на межі розділу з'являється невелика деформація, тоді розподіл струму змінюється, і виникає збурений струм. Цей струм взаємодіє з магнітним полем, що створює сили Лоренца. Якщо сили в'язкого опору не можуть загальмувати вплив сил Лоренца, тоді коливання можуть посилюватися, що, у свою чергу, призводить до погіршення роботи батареї або її руйнування. Схематично цей процес зображено на (Рис. 1.2).

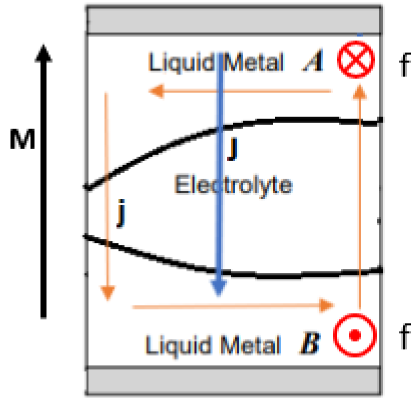

Рис. 1.2: Схематичне зображення зміни товщини електроліту.

де J - сталий вертикальний струм; j - густина збуреного електричного струму; M - індукція магнітного поля; f - сила Лоренца.

Дослідження цієї МГД-нестабільності вже проводились Зікановим [2], проте у його роботі розглядалася спрощена модель без урахування сил в'язкого опору, які відіграють важливу роль для стійкості системи рідин. Зауважимо, що аналогічні дослідження проводились у зв'язку з можливою нестабільністю поверхні розділу рідкого металу і електроліту в алюмінієвих електролізерах. Зокрема в роботі Sele T. [5] пояснюється механізм збудження хвилі що обертається.

Спираючись на роботу [2], розглянемо систему диференціальних рівнянь, яка описує коливання двох поверхонь розділу.

Нехай, електричний струм відсутній, тоді межі розділу коливаються лише з власними частотами. Такі коливання можна описати системою:

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 + \omega_{1x}^2 X_1 = 0 \\ \ddot{Y}_1 + \omega_{1y}^2 Y_1 = 0 \\ \ddot{X}_2 + \omega_{2x}^2 X_2 = 0 \\ \ddot{Y}_2 + \omega_{2y}^2 Y_2 = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

де X_i, Y_i — це функції часу (амплітудні множники), які описують відхилення від стану спокою поверхонь розділу рідин вздовж напрямків осей x та y відповідно;

ω_{ix} та ω_{iy} — власні частоти коливань для кожної межі розділу.

Кожне рівняння у системі описує коливання відносно осей x та y.

Для врахування сил в'язкого опору, які виникають через тертя рідин між собою та стінками ємності, додамо доданки, що відповідають за їх вплив. Тоді система (1.3) матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 + \mu_{1x}\dot{X}_1 + \omega_{1x}^2 X_1 = 0 \\ \ddot{Y}_1 + \mu_{1y}\dot{Y}_1 + \omega_{1y}^2 Y_1 = 0 \\ \ddot{X}_2 + \mu_{2x}\dot{X}_2 + \omega_{2x}^2 X_2 = 0 \\ \ddot{Y}_2 + \mu_{2y}\dot{Y}_2 + \omega_{2y}^2 Y_2 = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

де $\mu_{ix}\dot{X}_i$ та $\mu_{iy}\dot{Y}_i$ - доданки, які відповідають силам в'язкого опору.

Оскільки під час роботи рідкометалевої батареї виникають МГД-взаємодії, то їх також потрібно враховувати, а також вплив коливань однієї поверхні розділу на іншу. Тому до системи (1.4) додаються ще доданки, які більш детально описані у статті [2].

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 + \mu_{1x}\dot{X}_1 + \omega_{1x}^2 X_1 - k_{1x}(Y_2 - Y_1) = 0 \\ \ddot{Y}_1 + \mu_{1y}\dot{Y}_1 + \omega_{1y}^2 Y_1 + k_{1y}(X_2 - X_1) = 0 \\ \ddot{X}_2 + \mu_{2x}\dot{X}_2 + \omega_{2x}^2 X_2 + k_{2x}(Y_2 - Y_1) = 0 \\ \ddot{Y}_2 + \mu_{2y}\dot{Y}_2 + \omega_{2y}^2 Y_2 - k_{2y}(X_2 - X_1) = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

$k_{ix}(Y_2 - Y_1); k_{iy}(X_2 - X_1)$ - доданки, що враховують взаємодію між модами

X_i, Y_i та вплив однієї границі на іншу

Ця лінійна система диференціальних рівнянь описує сумісні коливання двох поверхонь розділу у рідкометалевій батареї за умови малих амплітуд. Якщо ж амплітуди коливань починають зростати, то в системі (1.5) з'являються нелінійні доданки, оскільки лінійне наближення вже не працює, і потрібно враховувати нелінійні ефекти. У кожному з рівнянь будемо враховувати лише головні нелінійні доданки, вважаючи їх квадратичними. Тоді система (1.5) прийме вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 + \mu_{1x}\dot{X}_1 + \omega_{1x}^2 X_1 - k_{1x}(Y_2 - Y_1) + c_{1x}X_1^2 = 0 \\ \ddot{Y}_1 + \mu_{1y}\dot{Y}_1 + \omega_{1y}^2 Y_1 + k_{1y}(X_2 - X_1) + c_{1y}Y_1^2 = 0 \\ \ddot{X}_2 + \mu_{2x}\dot{X}_2 + \omega_{2x}^2 X_2 + k_{2x}(Y_2 - Y_1) + c_{2x}X_2^2 = 0 \\ \ddot{Y}_2 + \mu_{2y}\dot{Y}_2 + \omega_{2y}^2 Y_2 - k_{2y}(X_2 - X_1) + c_{2y}Y_2^2 = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Розділ 2

Дослідження лінійної системи

Дослідимо лінійну систему диференціальних рівнянь (1.5), визначимо положення рівноваги системи та їхню стійкість, знайдемо випадки та умови, за яких положення рівноваги змінює свою стійкість.

Положення рівноваги визначається з умов: $\ddot{X}_i = \dot{X}_i = \ddot{Y}_i = \dot{Y}_i = 0$. Отже, система (1.5) набуває вигляд:

$$\begin{cases} \omega_{1x}^2 X_1 - k_{1x}(Y_2 - Y_1) = 0 \\ \omega_{1y}^2 Y_1 + k_{1y}(X_2 - X_1) = 0 \\ \omega_{2x}^2 X_2 + k_{2x}(Y_2 - Y_1) = 0 \\ \omega_{2y}^2 Y_2 - k_{2y}(X_2 - X_1) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Ця система має розв'язок лише в точці $X_i = Y_i = 0$, яка є положенням рівноваги. Щоб перевірити стаціонарну точку на стійкість, потрібно дещо змінити систему (1.5). Виконаємо заміну $\dot{X}_i = V_{x_i}$ та $\dot{Y}_i = V_{y_i}$. У результаті отримаємо нову систему з восьми диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = V_{x1} \\ \dot{V}_{x1} = -\mu_{1x}V_{x1} - \omega_{1x}^2 X_1 + k_{1x}(Y_2 - Y_1) \\ \dot{Y}_1 = V_{y1} \\ \dot{V}_{y1} = -\mu_{1y}V_{y1} - \omega_{1y}^2 Y_1 - k_{1y}(X_2 - X_1) \\ \dot{X}_2 = V_{x2} \\ \dot{V}_{x2} = -\mu_{2x}V_{x2} - \omega_{2x}^2 X_2 - k_{2x}(Y_2 - Y_1) \\ \dot{Y}_2 = V_{y2} \\ \dot{V}_{y2} = -\mu_{2y}V_{y2} - \omega_{2y}^2 Y_2 + k_{1y}(X_2 - X_1) \end{cases} \tag{2.2}$$

Матриця коефіцієнтів цієї системи має вигляд:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{1x}^2 & -\mu_{1x} & -k_{1x} & 0 & 0 & 0 & k_{1x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{1y} & 0 & -\omega_{1y}^2 & -\mu_{1y} & -k_{1y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{2x} & 0 & -\omega_{2x}^2 & -\mu_{2x} & -k_{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{2y} & 0 & 0 & 0 & k_{2y} & 0 & -\omega_{2y}^2 & -\mu_{2y} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Характеристичний многочлен цієї матриці буде восьмого степеня

$$P(\lambda) = \lambda^8 + a_7\lambda^7 + a_6\lambda^6 + a_5\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \tag{2.4}$$

де a_i - різні комбінації коефіцієнтів $\omega_{ij}; \mu_{ij}; k_{ij}$, $i = [1, 2]; j = [x, y]$.

Аналітичний розв'язок такого характеристичного рівняння неможливий, тому для подальшого дослідження необхідно шукати чисельні розв'язки.

Розглянемо випадок, коли батарея має квадратний горизонтальний переріз, тобто довжина вздовж осей x та y однакова. У цьому випадку коефіцієнти при відповідних доданках будуть однаковими. Також оберемо значення цих параметрів.

$$\mu_{1x} = \mu_{1y} = 1.4; \mu_{2x} = \mu_{2y} = 1.8;$$

$$\omega_{1x} = \omega_{1y} = 1.2; \omega_{2x} = \omega_{2y} = 1.6;$$

$$k_{1x} = k_{1y} = 1.5; k_{2x} = k_{2y} = 2.0;$$

За таких параметрів корені характеристичного многочлена (2.4) матимуть такий вигляд:

$$\lambda_1 = -1.9 + 1.62i$$

$$\lambda_2 = -1.9 - 1.62i$$

$$\lambda_3 = 0.27 + 1.575i$$

$$\lambda_4 = 0.27 - 1.575i$$

$$\lambda_5 = -0.798 + 1.119i$$

$$\lambda_6 = -0.798 - 1.119i$$

$$\lambda_7 = -0.772 + 1.165i$$

$$\lambda_8 = -0.772 - 1.165i$$

Оскільки λ_3 та λ_4 мають додатну дійсну частину, то стаціонарна точка $X_i = Y_i = 0$ є нестійкою. Побудуємо фазовий портрет. Оскільки система (2.2) є восьмивимірною, єдиним варіантом візуалізації є побудова проекцій. Кількість можливих проекцій становить двадцять вісім, однак не всі з них є достатньо зручними для аналізу. Тому у цій роботі будуть наведені лише найбільш інформативні проекції.

Візьмемо два варіанта початкових умов A та B:

$$A : X_1 = 1; V_{x1} = 0; X_2 = 1; V_{x2} = 0; Y_1 = 1; V_{y1} = 0; Y_2 = 1; V_{y2} = 0$$

$$B : X_1 = 2; V_{x1} = 0; X_2 = 2.1; V_{x2} = 0; Y_1 = 1.8; V_{y1} = 0; Y_2 = 1.5; V_{y2} = 0$$

Тоді проекції фазових траєкторій будуть наступними:

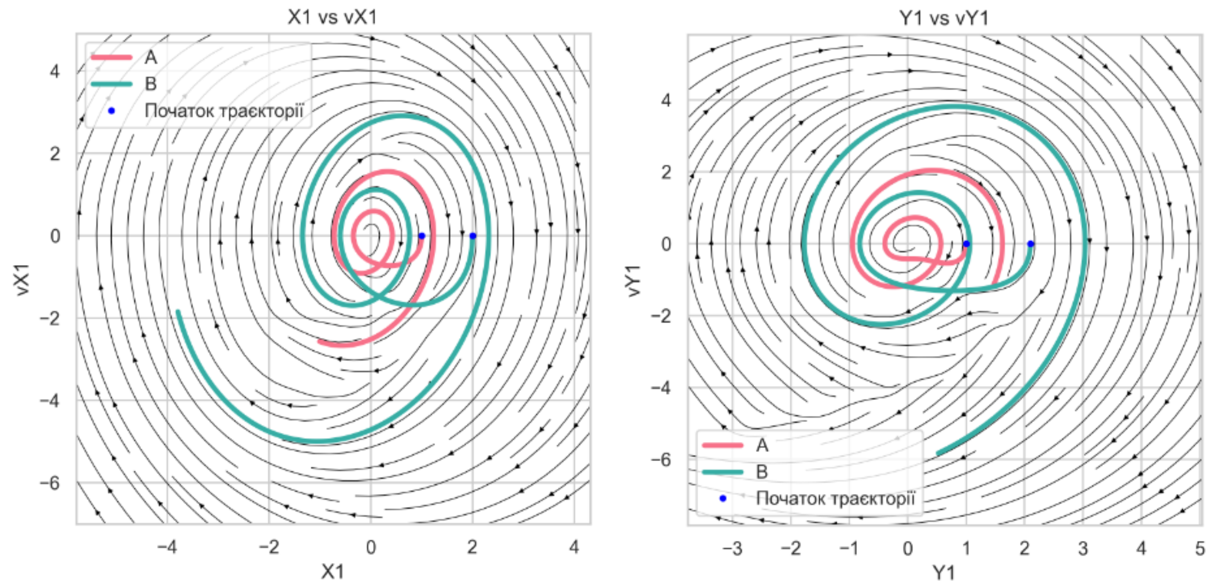

Рис. 2.1: Нестійке положення рівноваги. Проекція на (X_1, V_{x1}) та (Y_1, V_{y1})

Кожна траєкторія починається з синьої точки. Червона траєкторія відповідає точці A, зелена - точці B. Чорні лінії не є проекціями фазових траєкторій - вони лише вказують напрямок руху вздовж траєкторії.

Як можемо бачити, проекції фазових траєкторій віддаляються від положення рівноваги, що підтверджує раніше зроблений висновок про нестійкість положення рівноваги. Це зумовлено тим, що коефіцієнти k_{ij} при доданках, які відповідають за МГД взаємодію, є достатньо великими відносно інших коефіцієнтів при відповідних доданках, щоб положення рівноваги стало нестійким. Збільшення коефіцієнтів при доданках, що відповідають за сили в'язкого опору, може зробити положення рівноваги стійким.

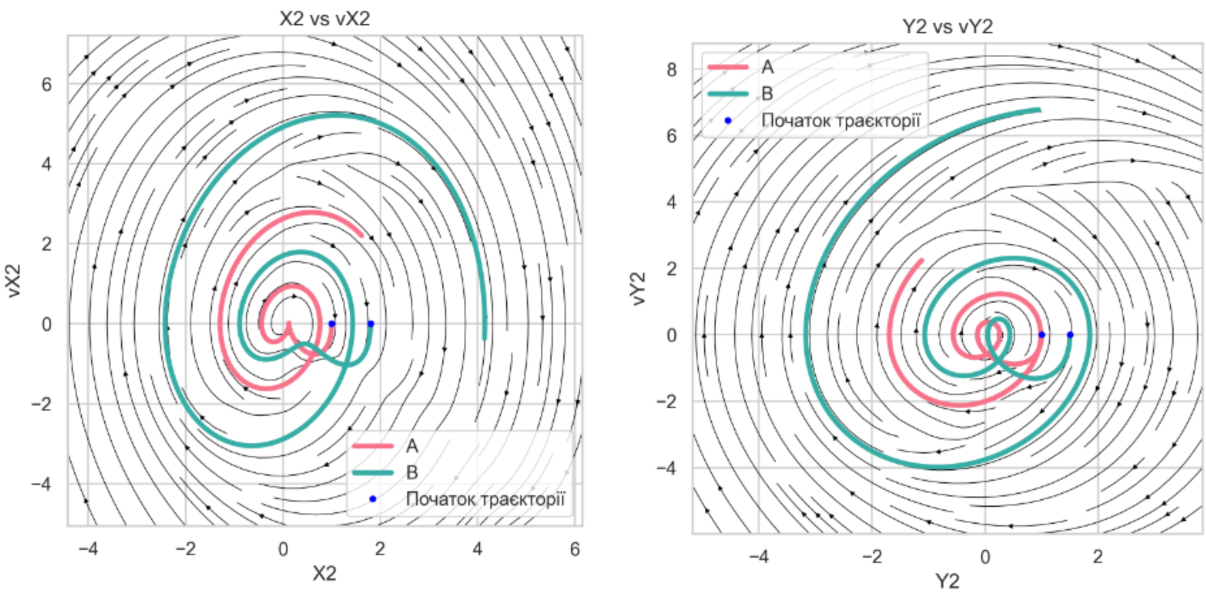

Рис. 2.2: Нестійке положення рівноваги. Проекція на (X_2, V_{x2}) та (Y_2, V_{y2})

Розглянемо випадок зі збільшеними значеннями коефіцієнтів μ_{ij}:

$$\mu_{1x} = \mu_{1y} = 2.5; \mu_{2x} = \mu_{2y} = 3.0;$$

З (2.3) та (2.4) ми отримуємо, що усі дійсні частини коренів характеристичного многочлена є від'ємними а отже, положення рівноваги стійке.

$$\lambda_1 = -2.698 + 1.350i$$

$$\lambda_2 = -2.698 - 1.350i$$

$$\lambda_3 = -0.087 + 1.319i$$

$$\lambda_4 = -0.087 - 1.319i$$

$$\lambda_5 = -1.378 + 0.265i$$

$$\lambda_6 = -1.378 - 0.265i$$

$$\lambda_7 = -1.335 + 0.296i$$

$$\lambda_8 = -1.335 - 0.296i$$

Початкові умови на цей раз будуть іншими:

$$A : X_1 = 5; V_{x1} = 0; X_2 = 5.1; V_{x2} = 0; Y_1 = 3.8; V_{y1} = 0; Y_2 = 3.5; V_{y2} = 0$$

$$B : X_1 = 2; V_{x1} = 0; X_2 = 1.1; V_{x2} = 0; Y_1 = 2.2; V_{y1} = 0; Y_2 = 3.0; V_{y2} = 0$$

Усі траєкторії швидко прямують до положення рівноваги, що підтверджує стійкість стаціонарної точки при збільшених коефіцієнтах μ_{ij}.

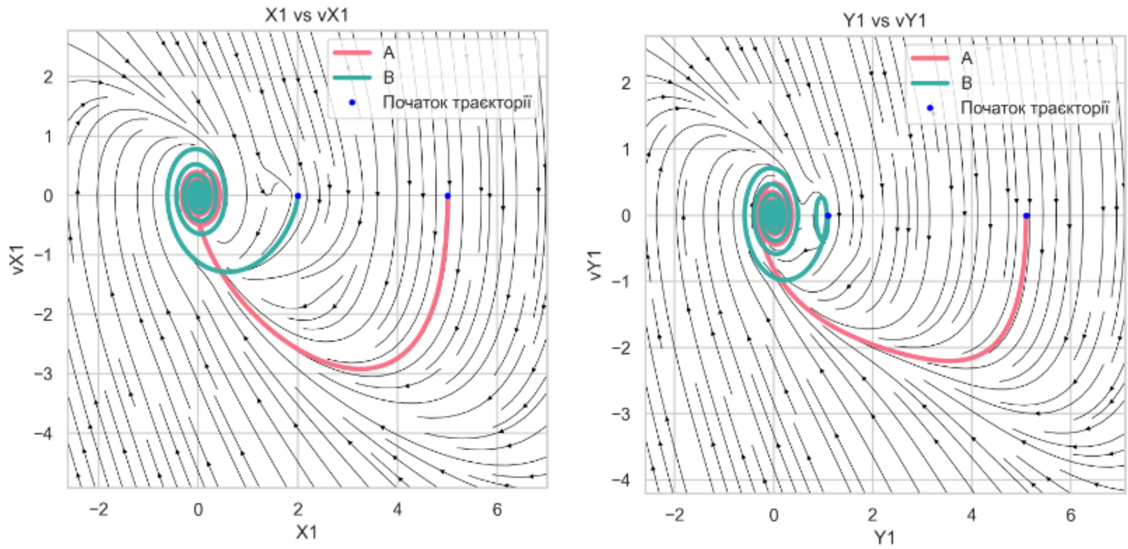

Рис. 2.3: Стійке положення рівноваги. Проекція на (X_1, V_{x1}) та (Y_1, V_{y1})

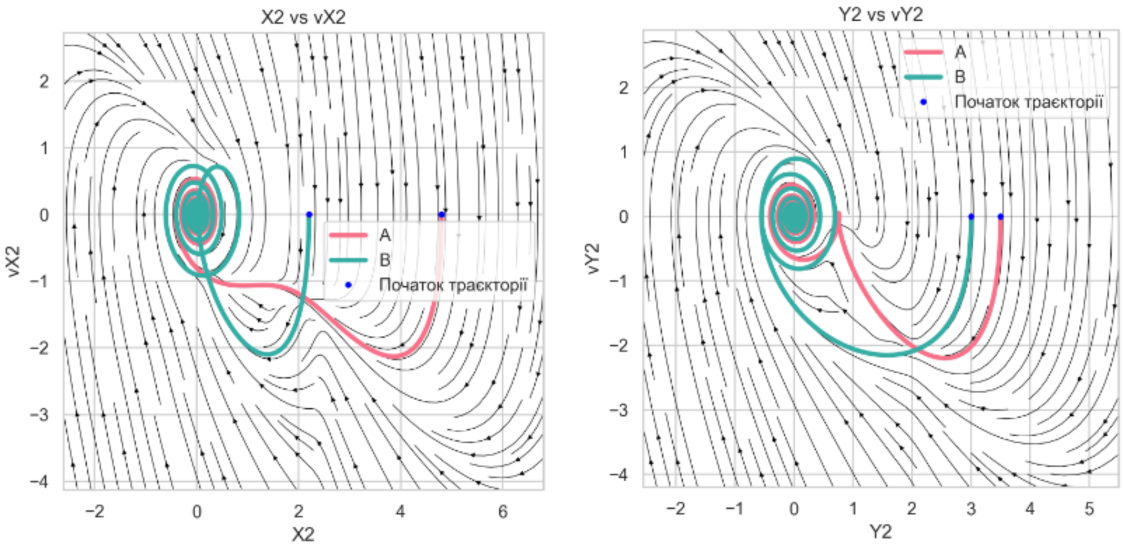

Рис. 2.4: Стійке положення рівноваги. Проекція на (X_2, V_{x2}) та (Y_2, V_{y2})

Розділ 3

Дослідження нелінійної системи

Розглянемо нелінійну систему, описану в першому розділі.

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 + \mu_{1x}\dot{X}_1 + \omega_{1x}^2 X_1 - k_{1x}(Y_2 - Y_1) + c_{1x}X_1^2 = 0 \\ \ddot{Y}_1 + \mu_{1y}\dot{Y}_1 + \omega_{1y}^2 Y_1 + k_{1y}(X_2 - X_1) + c_{1y}Y_1^2 = 0 \\ \ddot{X}_2 + \mu_{2x}\dot{X}_2 + \omega_{2x}^2 X_2 + k_{2x}(Y_2 - Y_1) + c_{2x}X_2^2 = 0 \\ \ddot{Y}_2 + \mu_{2y}\dot{Y}_2 + \omega_{2y}^2 Y_2 - k_{2y}(X_2 - X_1) + c_{2y}Y_2^2 = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Положення рівноваги цієї системи визначається з умов: $\ddot{X}_i = \dot{X}_i = \ddot{Y}_i = \dot{Y}_i = 0$. Отже, (3.1) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \omega_{1x}^2 X_1 - k_{1x}(Y_2 - Y_1) + c_{1x}X_1^2 = 0 \\ \omega_{1y}^2 Y_1 + k_{1y}(X_2 - X_1) + c_{1y}Y_1^2 = 0 \\ \omega_{2x}^2 X_2 + k_{2x}(Y_2 - Y_1) + c_{2x}X_2^2 = 0 \\ \omega_{2y}^2 Y_2 - k_{2y}(X_2 - X_1) + c_{2y}Y_2^2 = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Як і у випадку з лінійною системою, положення рівноваги буде лише в точці $X_i = Y_i = 0$. Для перевірки стаціонарної точки на стійкість перетворимо систему (3.1) так само як і у випадку з лінійною системою, зробивши заміну: $\dot{X}_i = V_{x_i}$ та $\dot{Y}_i = V_{y_i}$. У результаті отримаємо систему диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = V_{x1} \\ \dot{V}_{x1} = -\mu_{1x}V_{x1} - \omega_{1x}^2 X_1 + k_{1x}(Y_2 - Y_1) - c_{1x}X_1^2 \\ \dot{Y}_1 = V_{y1} \\ \dot{V}_{y1} = -\mu_{1y}V_{y1} - \omega_{1y}^2 Y_1 - k_{1y}(X_2 - X_1) - c_{1y}Y_1^2 \\ \dot{X}_2 = V_{x2} \\ \dot{V}_{x2} = -\mu_{2x}V_{x2} - \omega_{2x}^2 X_2 - k_{2x}(Y_2 - Y_1) - c_{2x}X_2^2 \\ \dot{Y}_2 = V_{y2} \\ \dot{V}_{y2} = -\mu_{2y}V_{y2} - \omega_{2y}^2 Y_2 + k_{1y}(X_2 - X_1) - c_{2y}Y_2^2 \end{cases} \tag{3.3}$$

Для подальшого дослідження стаціонарної точки на стійкість скористаємося методом Якобі. Матриця Якобі для системи (3.3) матиме вигляд:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{1x}X_1 - \omega_{1x}^2 & -\mu_{1x} & -k_{1x} & 0 & 0 & 0 & k_{1x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{1y} & 0 & c_{1y}Y_1 - \omega_{1y}^2 & -\mu_{1y} & -k_{1y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{2x} & 0 & c_{2x}X_2 - \omega_{2x}^2 & -\mu_{2x} & -k_{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{2y} & 0 & 0 & 0 & k_{2y} & 0 & c_{2y}Y_2 - \omega_{2y}^2 & -\mu_{2y} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Оскільки положення рівноваги лише одне і воно є нульовим, то, підставляючи $X_i = Y_i = 0$ у матрицю (3.4), отримуємо таку саму матрицю, що й у (2.3). Для зручності виберемо такі самі коефіцієнти $\mu_{ij}; \omega_{ij}; k_{ij}$ та визначимось з коефіцієнтами c_{ij}:

$$\mu_{1x} = \mu_{1y} = 1.4; \mu_{2x} = \mu_{2y} = 1.8;$$

$$\omega_{1x} = \omega_{1y} = 1.2; \omega_{2x} = \omega_{2y} = 1.6;$$

$$k_{1x} = k_{1y} = 1.5; k_{2x} = k_{2y} = 2.0;$$

$$c_{1x} = c_{1y} = 1.5; c_{2x} = c_{2y} = 2.0;$$

Коефіцієнти c_{ij} не впливають на корені характеристичного многочлену, тому значення λ_i будуть такими самими, як і в лінійному випадку, а положення рівноваги — нестійким.

Побудуємо проєкції фазового портрета:

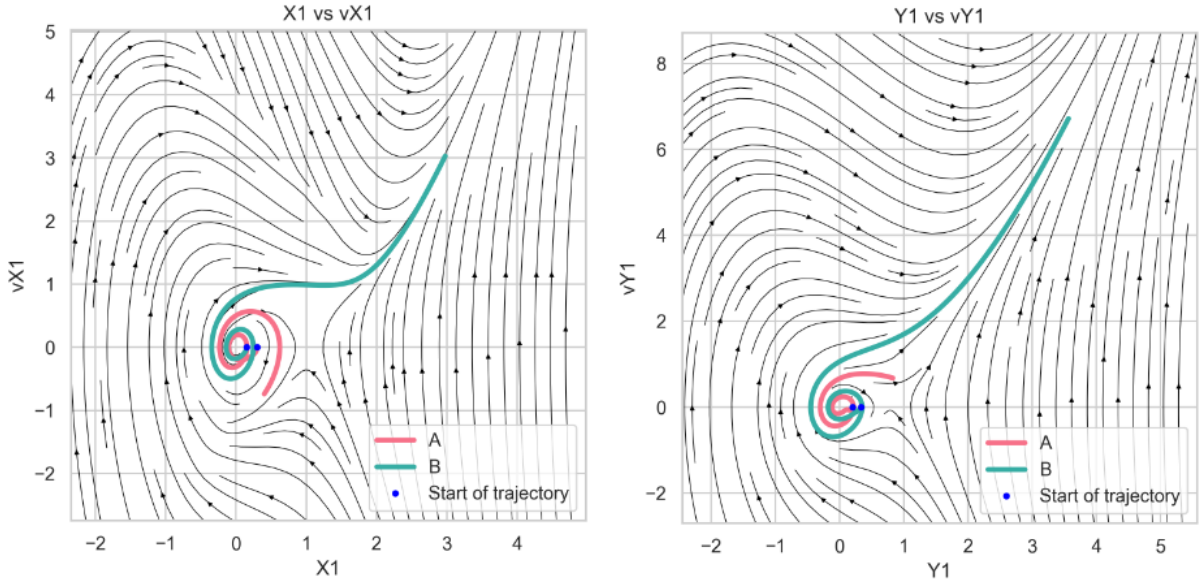

Рис. 3.1: Нестійке положення рівноваги. Проекція на (X_1, V_{x1}) та (Y_1, V_{y1})

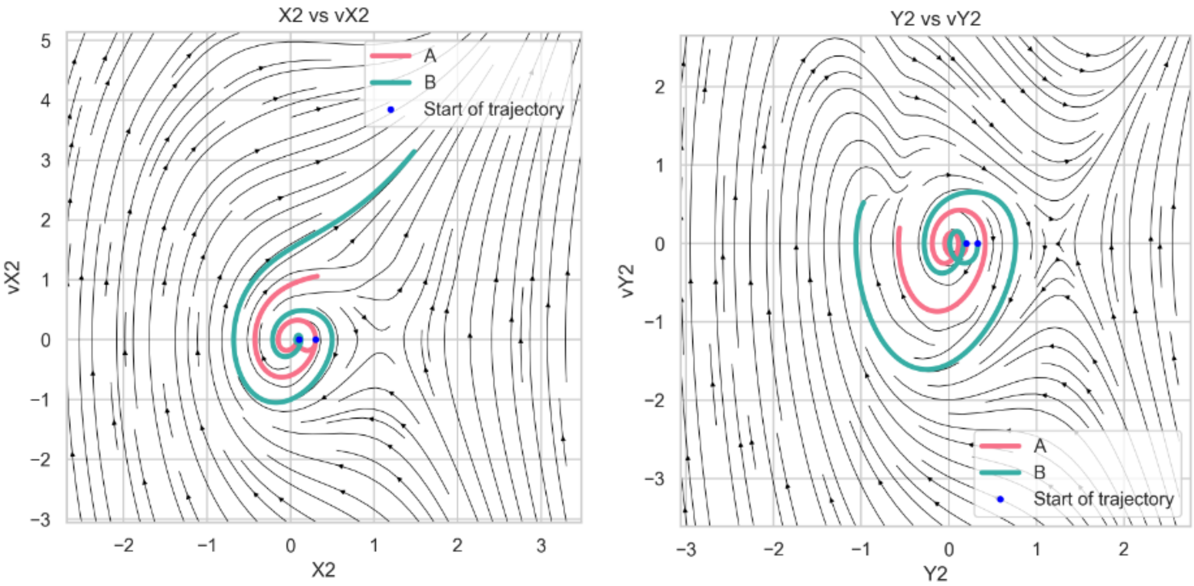

Рис. 3.2: Нестійке положення рівноваги. Проекція на (X_2, V_{x2}) та (Y_2, V_{y2})

Було обрано такі початкові умови:

$$A : X_1 = 0.3; V_{x1} = 0; X_2 = 0.2; V_{x2} = 0; Y_1 = 0.3; V_{y1} = 0; Y_2 = 0.2; V_{y2} = 0$$

$$B : X_1 = 0.15; V_{x1} = 0; X_2 = 0.33; V_{x2} = 0; Y_1 = 0.1; V_{y1} = 0; Y_2 = 0.33; V_{y2} = 0$$

Як можемо бачити, положення рівноваги дійсно є нестійким. Швидкість віддалення траєкторій від положення рівноваги є досить великою, саме через вплив нелінійних доданків.

Оскільки раніше було з'ясовано, що стійкість стаціонарної точки не залежить від коефіцієнтів при нелінійних доданках, то для отримання стійкого положення рівноваги достатньо взяти $\mu_{1x} = \mu_{1y} = 2.5; \mu_{2x} = \mu_{2y} = 3;$. Для кращої візуалізації розглянемо такі початкові умови:

$$A : X_1 = 0.3; V_{x1} = 0; X_2 = 0.2; V_{x2} = 0; Y_1 = 0.3; V_{y1} = 0; Y_2 = 0.2; V_{y2} = 0$$

$$B : X_1 = -1; V_{x1} = 0; X_2 = -1; V_{x2} = 0; Y_1 = -1; V_{y1} = 0; Y_2 = -1; V_{y2} = 0$$

Проєкції фазового портрета матимуть вигляд:

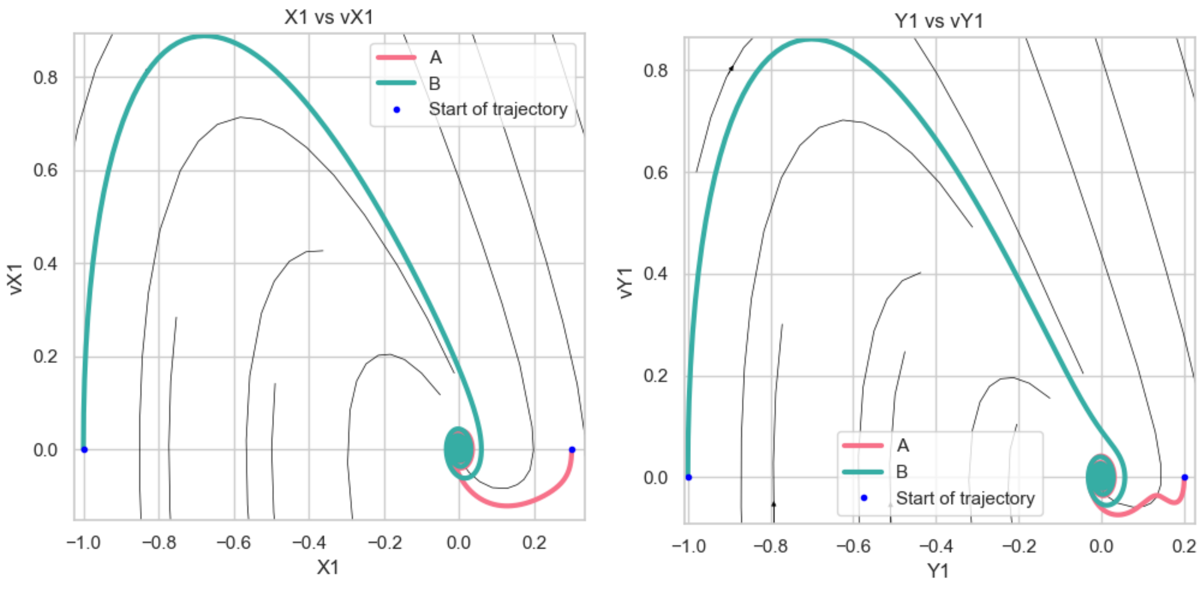

Рис. 3.3: Стійке положення рівноваги. Проекція на (X_1, V_{x1}) та (Y_1, V_{y1})

Проєкції траєкторій дійсно наближаються до стаціонарної точки, що

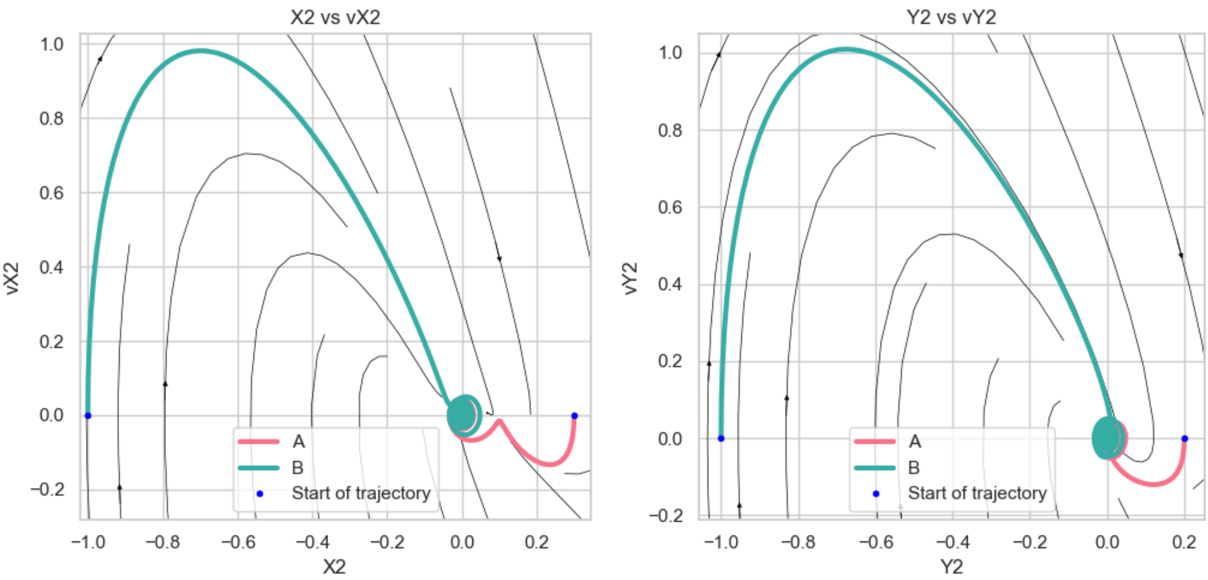

Рис. 3.4: Стійке положення рівноваги. Проекція на (X_2, V_{x2}) та (Y_2, V_{y2})

вказує на її стійкість. Як і в минулому випадку, можемо зробити висновок, що коефіцієнти при нелінійних доданках впливають на швидкість наближення до положення рівноваги.

Під час дослідження системи комбінувалися різні значення параметрів, проте граничних циклів, які виникали при аналізі МГД нестійкості в алюмінієвих електролізерах [6], виявлено не було.

Розділ 4

Лістинги

У цьому розділі наведені програми мовою Python, які були написані для чисельних розрахунків.

Перший лістинг.

Лістинг 4.1: Пошук стаціонарної точки. Визначення стійкості положення рівноваги

```
import numpy as np
from scipy.optimize import fsolve
import sympy as sp


mu_1x, mu_1y = 1.4, 1.4
mu_2x, mu_2y = 1.8, 1.8
omega_1x, omega_1y = 1.2, 1.2
omega_2x, omega_2y = 1.6, 1.6
k_1x, k_1y = 1.5, 1.5
k_2x, k_2y = 2.0, 2.0
c_1x, c_1y = 2.5, 2.5
c_2x, c_2y = 2.6, 2.6

X1, vX1, Y1, vY1, X2, vX2, Y2, vY2 = sp.symbols('X1 vX1
    Y1 vY1 X2 vX2 Y2 vY2')
```

```python
F = sp.Matrix([
    vX1,
    -mu_1x * vX1 - omega_1x**2 * X1 + k_1x * (Y2-Y1)-c_1x*X1**2,
    vY1,
    -mu_1y * vY1 - omega_1y**2 * Y1 - k_1y * (X2-X1)-c_1y*Y1**2,
    vX2,
    -mu_2x * vX2 - omega_2x**2 * X2 - k_2x * (Y2-Y1)-c_2x*X2**2,
    vY2,
    -mu_2y * vY2 - omega_2y**2 * Y2 + k_2y * (X2-X1)-c_2y*Y2**2
])

J = F.jacobian([X1, vX1, Y1, vY1, X2, vX2, Y2, vY2])

print("J:")
sp.pprint(J)

J_func = sp.lambdify((X1, vX1, Y1, vY1, X2, vX2, Y2, vY2), J, 'numpy')

def equilibrium_equations(vars):
    X1, Y1, X2, Y2 = vars
    eq1 = omega_1x**2 * X1 - k_1x * (Y2-Y1)
    eq2 = omega_1y**2 * Y1 + k_1y * (X2-X1)
```

```
    eq3 = omega_2x**2 * X2 + k_2x * (Y2-Y1)
    eq4 = omega_2y**2 * Y2 - k_2y * (X2-X1)
    return [eq1, eq2, eq3, eq4]

num_guesses = 100
initial_guesses = np.random.uniform(-10, 10, (
    num_guesses, 4))

equilibria = []
for guess in initial_guesses:
    sol = fsolve(equilibrium_equations, guess, xtol=1e
        -10)
    if np.allclose(equilibrium_equations(sol), [0, 0,
        0, 0], atol=1e-5):
        if not any(np.allclose(sol, eq, atol=1e-5) for
            eq in equilibria):
            equilibria.append(sol)

equilibria = np.array(equilibria)



def classify_equilibrium(eigenvalues):
    real_parts = np.real(eigenvalues)
    imag_parts = np.imag(eigenvalues)

    if np.all(real_parts < 0):
        return "Stable node"
```

```
    elif np.all(real_parts > 0):
        return "Unstable node"
    elif np.any(real_parts > 0) and np.any(real_parts < 
        0):
        return "Saddle"
    elif np.all(real_parts == 0) and np.any(imag_parts 
        != 0):
        return "Center"
    elif np.all(real_parts < 0) and np.any(imag_parts 
        != 0):
        return "Stable focus"
    elif np.all(real_parts > 0) and np.any(imag_parts 
        != 0):
        return "Unstable focus"
    else:
        return "NaN"

for eq in equilibria:
    X1_val, Y1_val, X2_val, Y2_val = eq
    J_numeric = np.array(J_func(X1_val, 0, Y1_val, 0, 
        X2_val, 0, Y2_val, 0), dtype=float)
    eigenvalues = np.linalg.eigvals(J_numeric)
    equilibrium_type = classify_equilibrium(eigenvalues
        )

    print(f"Equilibrium position (X1, Y1, X2, Y2) = {eq
        } -> Eigen values: {eigenvalues} -> Type: {
```

```
    equilibrium_type}")

print(eq)
```

Лістинг 4.2: Побудова фазового портрету

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
import seaborn as sns



mu_1x, mu_1y = 1.4, 1.4
mu_2x, mu_2y = 1.8, 1.8

omega_1x, omega_1y = 1.2, 1.2
omega_2x, omega_2y = 1.6, 1.6

k_1x, k_1y = 1.5, 1.5
k_2x, k_2y = 2.0, 2.0

c_1x, c_1y = 2.5, 2.5
c_2x, c_2y = 2.6, 2.6

def system(state, t):
    X1, dX1, Y1, dY1, X2, dX2, Y2, dY2 = state
    ddX1 = -mu_1x * dX1 - omega_1x**2 * X1 + k_1x * (Y2
        - Y1)+c_1x*X1**2
    ddY1 = -mu_1y * dY1 - omega_1y**2 * Y1 - k_1y * (X2
```

```
        - X1)+c_1y*Y1**2
    ddX2 = -mu_2x * dX2 - omega_2x**2 * X2 - k_2x * (Y2
        - Y1)+c_2x*X2**2
    ddY2 = -mu_2y * dY2 - omega_2y**2 * Y2 + k_2y * (X2
        - X1)+c_2y*Y2**2
    return [dX1, ddX1, dY1, ddY1, dX2, ddX2, dY2, ddY2]

t = np.linspace(0, 10, 5000)
initial_conditions = [
    [0.3, 0, 0.2, 0, 0.3, 0, 0.2, 0],
    [0.15, 0, 0.33, 0, 0.1, 0, 0.33, 0]
    #[5, 0, 5.1, 0, 4.8, 0, 3.5, 0],
    #[2, 0, 1.1, 0, 2.2, 0, 3.0, 0]
]
trajectories = [odeint(system, ic, t, rtol=1e-8, atol=1
  e-10) for ic in initial_conditions]

var_labels = ["X1", "vX1", "Y1", "vY1", "X2", "vX2", "
  Y2", "vY2"]
projections = [(i, j, var_labels[i], var_labels[j]) for
    i in range(8) for j in range(i + 1, 8)]

sns.set(style="whitegrid")
colors = sns.color_palette("husl", len(
  initial_conditions))
grid_size = 30
```

```
for batch in range(0, len(projections), 6):
    fig, axes = plt.subplots(2, 3, figsize=(15, 10))
    axes = axes.flatten()
    for ax, (ix, iy, xlabel, ylabel) in zip(axes, ↩
      projections[batch:batch+6]):
        all_x = np.concatenate([sol[:, ix] for sol in ↩
          trajectories])
        all_y = np.concatenate([sol[:, iy] for sol in ↩
          trajectories])

        margin = 2
        x_min, x_max = all_x.min() - margin, all_x.max↩
          () + margin
        y_min, y_max = all_y.min() - margin, all_y.max↩
          () + margin

        x_vals = np.linspace(x_min, x_max, grid_size)
        y_vals = np.linspace(y_min, y_max, grid_size)
        X, Y = np.meshgrid(x_vals, y_vals)
        U, V = np.zeros_like(X), np.zeros_like(Y)

        all_states = np.concatenate(trajectories)

        for i in range(grid_size):
            for j in range(grid_size):
                distances = (all_states[:, ix] - X[i, j↩
```

```
        ])**2 + (all_states[:, iy] - Y[i, j ↩
        ])**2
      nearest_idx = np.argmin(distances)
      approx_state = all_states[nearest_idx]. ↩
        copy()
      approx_state[ix] = X[i, j]
      approx_state[iy] = Y[i, j]
      derivs = system(approx_state, 0)
      U[i, j] = derivs[ix]
      V[i, j] = derivs[iy]

ax.streamplot(X, Y, U, V, color='black', ↩
  density=1.2, linewidth=0.5, arrowsize=0.6)

for idx, (sol, color) in enumerate(zip( ↩
  trajectories, colors)):
    label = "A" if idx == 0 else "B"
    ax.plot(sol[:, ix], sol[:, iy], color=color ↩
      , label=label,linewidth=3)

for idx, eq in enumerate(initial_conditions):
    if idx == 0:
        ax.plot(eq[ix], eq[iy], 'o', color=' ↩
          blue', markersize=3, label="Start␣of ↩
          ␣trajectory")
    else:
        ax.plot(eq[ix], eq[iy], 'o', color=' ↩
```

```
                blue', markersize=3)

        ax.set_xlim(x_min, x_max)
        ax.set_ylim(y_min, y_max)
        ax.set_xlabel(xlabel)
        ax.set_ylabel(ylabel)
        ax.set_title(f'{xlabel} vs {ylabel}')
        ax.legend()

    plt.tight_layout()
    plt.show()
    plt.tight_layout()
    plt.savefig(f'projections_batch_nelin_{batch // 6 +
        1}.png', dpi=300)
    plt.close()
```

Висновки

Результати дослідження математичної моделі МГД нестійкості показали, що поведінка системи змінюється залежно від параметрів. Єдина стаціонарна точка $(0, 0)$ може змінювати свою стійкість. Якщо положення рівноваги було нестійким, траєкторії прямували до нескінченності, що вказує на необмежене зростання амплітуди коливань. За умов, коли коефіцієнти при доданках, які відповідають за сили в'язкого опору, перевищували деякі порогові значення, система набувала стійкого положення рівноваги. Під час дослідження системи з квадратичною нелінійністю випадків утворення граничного циклу виявлено не було.

Список використаних джерел

[1] Sabrina Bénard. Flows and mixing in liquid metal batteries. Fluid mechanics. Université Paris-Saclay, 2023. English. NNT : 2023UPAST139ff. fftel-04409555v2f

[2] Zikanov O. Metal pad instabilities in liquid metal batteries. Physical Review E, 92(6):063021, 2015.

[3] Herreman W., Nore C., Guermond J.-L., Cappanera L., Weber N., Horstmann G.M. Perturbation theory for metal pad roll instability in cylindrical reduction cells. J. Fluid Mech. 2019, val.878, p.598–546

[4] Herreman W., Wierzchalek L., Horstmann G.M., Nore C. Stability theory for metal pad roll in cylindrical liquid metal batteries. J. Fluid Mech. 2023, val.962, A6

[5] Sele T. Instabilities of the metal surface in electrolytic aluminia reduction cells. Metallurgical transactions, 1977, 8B, P, 613–618.

[6] Мішнєв Д.Є. Дослідження автоколивальних систем. Кваліфікаційна робота бакалавра. Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2023